53. 等距離集合に就て（II）

津　田　大　夫

此處で述べたいことは切線が正則点で連續であること及曲線Eの長さを $\ell(E)$ と書くとき $\lim_{r\to 0} \ell(E(r)) = \ell(E)$ であることが云ひ得ることである。

$x \in E(r)$ に対して $x \in \mathrm{Front}\, U(x', r)$ $x' \in E$ なるとき $x \leftrightarrow x'$ が對應すると云う．そして $E(r) \ni x \longleftrightarrow x' \in E$ とかく． 又 $\Delta(r) = E_{m}(E(r) \ni x \longrightarrow x' \in E)$ と書く．又 $\Delta = \sum_{a>r>0} \Delta(r)$ とおくと，次の命題によつて Δ は a と無關係なことが判る．

$r < r'$ であれば $\Delta(r) \geqq \Delta(r')$ である．

$A \in \Delta(r')$ とすると $B \in E(r')$ が存在して $dis(A, B) = a'$ となる．

故 $C \in \overline{AB}$ $dis(A, C) = r$ とす． $C \mp E(r)$ とすれば $\underset{x \in E}{dis}(C, x) < r$ なる x が存在せねばならぬ。そこで $dis(B, x) < dis(B, C) + dis(x, C) < (r' - r) + r = r'$ 然るに $dis(B, x) \geqq dis(B, E) = r$ にむじゆんする．故に $C \in (r)$ 故に $dis(C, A) = r$ より $A \in \Delta(r)$ 故に．

$\Delta(r) \geqq \Delta(r')$

$\Delta(r)$ は有界閉集合である。

$P_n \in \Delta(r)$ $(n = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$ $P_n \to P$ とする．さて $\Delta(r) \ni P_n \to q_n \in E(r)$ $dis(P_n, q_n) = r$． さて $E(r)$ は有界閉集合なる故 Bolzano-Weierstrass の定理によつて $\{q_n\}$ の部分列 $\{q_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$ 然も $q_{n_k} \to q$ である．さて $P_{n_k} \to P$ そこで容易に判るが $dis(P, q) = r$ となる． 即ち $q \in \Delta(a)$ 即 $\Delta(r)$ は閉集合である。

さてEが Jordan 閉曲線なるときを Γ と書くことにする．すると次が成立する．

Δ は Γ に於て稠密である．

〔証明〕 $A \in \Gamma$ に對し任意の近傍 $U(A, \rho)$ を作る．それに對し，$U(A, \frac{\rho}{2})$ を作り $B \in U(A, \frac{\rho}{2}) \cdot C[\Gamma]$ ここに $[\Gamma]$ とは Γ の内部領域 $C[\Gamma]$ とは Γ の外部とする．又 B と ∞ を連續曲線 Λ で結びうる。但し Λ は $C[\Gamma]$ に

属す. $dis(\Lambda, \Gamma) = \alpha \leqq dis(A,B) < \frac{\rho}{2}$ である. すて $\sigma < max(dis(\Lambda,\Gamma), \frac{\rho}{2})$ をとり $\Gamma(\sigma)$ を考へる. すると $\Gamma(\lambda)$ は円 $U(A,\rho)$ を二分する. 然して A, B はその異る部分に属す. 然も $\overline{AB}$ は全く $U(A,\rho)$ に属すそこで $\overline{AB}$ と $\Gamma(\sigma)$ とは必ず交る. その点をDとせば $\Gamma(\sigma) \ni D \to C \in \Delta(\sigma) \subset \Delta$ ∴ $dis(A,C) \leqq dis(A,D) + dis(D,C) \leqq dis(A,B) + \sigma < \frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2} = \rho$ 即任意の $\rho>0$ に対して $\Delta \ni C$ が存在し $U(A,\rho)\ni C$ となる. 即 Δ は Γ に於て稠密である. (証明完了)

あとの $\lim_{\lambda\to 0} l(\Gamma(\lambda)) = l(\Gamma)$ を云ふためには $l(\Delta)=l(\Gamma)$ ではないかと思ってゐたのですが次の例を近藤先生が與へられました.

[0 1] 区間を分割する. 先ず [0, 1] の中に長さ u_0 の区間 u_0 を一つとる. そして0と u_0 のため区間を I_0 とし, 1 と u_0 のもの区間を I_1 とする 次に I_0, I_1, の中に一つづつ u_1 をとる. そして I_0 の u_1 の左の区間を I_{00} とし右の区間を I_{01} とする. I_1 の u_1 の左側の区間を I_{10}, 右側の区間を I_{11} とする. 以下同様にする. そして u_k の上の高さ V_k の細い尖形を作る. 但し $V_k = u_k c/2^k (k+1)^2$ とすれば確かに [0, 1] 上の点は此の曲線 Γ の Δ には含まれないことが判る. 此のとき Γ の長さは有界であり $\Gamma - \Delta$ の *linear measure* は勿論零でない.

定理 2 Γ を単一 *Jordan* 閉曲線とする. かつ $l(\Gamma) < +\infty$ とするとき $\lim_{\lambda\to 0} l(\Gamma(\lambda)) = l(\Gamma)$

[証明] Δ は Γ に於いて稠密なる故その中に点 $P_1, P_2, \cdots P_n$ をとり, $|l(\Gamma) - l((P_i)_1^n)| < \varepsilon$ をならしめうる. 但し $\varepsilon > 0$ は与えられてゐるものとし, $(P_i)_1^n$ とは (多角形 $P_1 P_2 \cdots P_n$) を略記したものである: $\Delta \ni P_i$ に対して λ_i が定まり $\Delta(\lambda_i) \ni P_i$ 故に $min(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) = \lambda$ とおくと $\Delta(\lambda) \ni P_i$ $(i=1,2,\cdots n)$ さて P_i に対して $\Gamma(\lambda)$ 上に q_i をとる. その上 $q_{n+1}, q_n \cdots q_m$ を新にとって $|l(\Gamma(\lambda)) - l((q_i)_1^m)| < \varepsilon$ としてよい. さて $q_{n+1} \cdots q_m$ に対応する Γ の点を $P_{n+1}, \cdots P_m$ とするとき, $l(\Gamma) > l((P)_1^m) > l((P)_1^n)$ よって $|l(\Gamma) - l((P_i)_1^m)| < \varepsilon$ さて $((q_i)_1^m)(\lambda)$ と $((p_i)_1^m)$ と $P(\lambda)$ の長さの関係を見るに $((q_i)_1^m)(\lambda) \ni B$

$(j=1.2\cdots\cdots m)$ 法も $((P_i)_1^m)$ は P_j を頂点とする多角形である。故に $\ell\{(q_i)_1^m|(\Omega)\}>\ell((P)_1^m)$ である。さて次に $((q_i)_1^m)(\Omega)$ の P_i と P_{i+1} の部分を一つとってくると、P_i からA迄が円弧、それを $\widehat{P_iA}$、次にAよりBまでが場合 それを $\overline{AB}$ 次にBより P_{i+1} 迄が円弧それを $\widehat{BP_{i+1}}$ とあらわす さてA及びBに對して $\overline{AB}$ に垂線を立て $P(\Omega)$ と交る点を A', B' とする。すると、$P(\Omega)\rfloor_{A'}^{B'}$（即 $P(\Omega)$ の A', B' の間の弧〕は一般に直線でない。又直線であれば $\overline{AB}$ は 平行四辺形の対辺であるから長さが等しい。いづれにしても $\ell(P(\Omega)_{A'}^{B'})\geqq\ell(\overline{AB})$。次に $P(\Omega)\rfloor_{P_i}^{A'}$ と $\widehat{P_iA}$ との比較であるが $\widehat{P_iA}$ は $U(q_i.\Omega)$ の $\mathfrak{Front}$ の点であるが $P(\Omega)$ は $U(q_i\Omega)$ の内部の点ではないことに注意する。そこで q_i, A, A' が一直線上にある。さて $\widehat{P_iA}$ 上に点 $M_1\ M_2\cdots M_K$ をとり q_iM_i が $P(a)$ との交点を $N_1\ N_2\cdots N_K$ とする。さて $\varepsilon>0$ に對して上の様に M を適当にとると、$|\ell(\widehat{P_iA})-\ell((M_i)_1^K)|<\varepsilon$ とならしめうる。さて $N_K\in P(\Omega)$ は円 $U(P_i,\Omega)$ の外にある故明かに $\ell(N_{h}, N_{h+1})\geqq\ell(M_h\,M_{h+1})\ (h=1.2\cdots k)$ そこで $\ell(P(\Omega)\rfloor_{P_i}^{A'})\geqq\ell((N_j)_1^K)\geqq\ell((M_j)_1^K)\geqq\ell(\widehat{P_iA})-\varepsilon$。$\varepsilon$ は任意であるから結局 $\ell((P(\Omega)\rfloor_{P_i}^{A'})\geqq\ell(\widehat{P_iA})$ を得る。よって結局 $\ell(P(\Omega)_{P_i}^{P_{i+1}})\geqq\ell\{[\{(q_i)_1^m)(\Omega)]_{P_i}^{P_{i+1}}\}$ そこで $\ell(P(\Omega))\geqq\ell[(q_i)_1^m(\Omega)]\geqq\ell((P_i)_1^m)$ 故に $|\ell(P(\Omega))-\varepsilon[(q_i)_1^m(\Omega)]|<\varepsilon$ である。さて今度は $|\ell(P)-\ell[(P_i)_1^m(\Omega)]|<\varepsilon$ と云ひたいが P が $\sum_{x\in P(\Omega)}U(x,\Omega)$ と共通点を持たぬから前と全く同じ論法が成立して云ひ得る。然るに次の関係が成立してゐる。即、

$$\ell[(q_i)_1^m(\Omega)]-\ell[(P_i)_1^m(\Omega)]=2\pi\Omega$$

そこで $2\pi\Omega-\Omega\varepsilon<|\ell(P)-\ell(P(\Omega))|<2\pi\Omega+2\varepsilon$

さて上の Ω のきめ方では $\varepsilon>0$ に對して $P_1, P_2\cdots P_n$ が定り、それに對して $\Delta(\Omega)\ni P_i\ (i=1.2,\cdots n)$ として Ω を定めた。が此処で $\Omega<\varepsilon$ と假定して差支へない。何となれば $\Omega>\varepsilon>\varepsilon'$ ならば $\Delta(\Omega)\subset\Delta(\varepsilon')$ なる故 ε' をあらためて Ω にとるとよい。そのときは

$$(2\pi-2)\varepsilon<|\ell(P)-\ell(P,\varepsilon))|<(2\pi+2)\varepsilon.$$

故に $$\lim_{\Omega\to 0}\ell(P(\Omega))=\ell(P)$$ 〔証明完了〕

定理 3；E(n)の正則点（即角点でない点）に於て切線は連続である。

証明　今命題を正しくないとして点Aは正則点でありながら切線はそこで不連続と仮定すればむじゅんすることを示したい。さて曲線 E(n) の点Xにおける切線が既定直線となす角を $\theta(X)$ で表すとすれば $\{X_i\}$ $(i=1,2\cdots\cdots)$ が $\lim_{i=\infty} X_i = A$ であるとき $\lim_{i=\infty}\theta(X_i)=\theta_0 \neq \theta(A)$ なる $\{X_i\}$ がある筈である。すると $E(n) \ni X_i \to Y_i \in \Delta(n)$ がある。然も前に $\Delta(n)$ は閉集合なることを示したから $\lim_{k\to\infty} Y_{i_k} = Y$ となれば AとYは対応する。然して又 $A \to A' \in \Delta(n)$ なる A' が存在する。然も $A \neq Y$ である。何となれば $\lim_{i\to\infty}\theta(X_i)=\theta_0$ より $\lim_{k\to\infty}\theta(X_{i_k})=\theta_0$ である。よって与へられた $\varepsilon>0$ に対して N_1 を定めると $k>N$ に対して $|\theta_0-\theta(X_{i_k})| < \varepsilon/n$ が成立する。次に $\lim X_{i_k}=A$ なる故に $\varepsilon>0$ に対して N_2 が定まり $m>N_2$ $dir(X_{i_m},A)<\varepsilon$ そこで $\max(N_1,N_2)=N$ とおくと $m>N$ とすれば $dir(X_{i_m},A)<\varepsilon$ かつ $|\theta_0-\theta(X_{i_m})| < \frac{\varepsilon}{n}$ となる。そこでAより長さnの線分 AB_0 及び AB_m を $AB_m \parallel X_mY_m$　$AB_0 \parallel \lim_{m\to\infty}(X_{i_m}\ Y_{i_m})$ なるが如くにとる。すると $dir(AX_m)=dir(B_mY_m)<\varepsilon$　そこで $\Delta A'BY_m$ に於て

$$\begin{aligned} dir(A'Y_m) &\geqq dir(A'B_0) - dir(B_0B_m) - dir(B_mY_m) \\ &\geqq n\sin(\theta(A)-\theta_0) - 2n(\theta_0-\theta(X_1)) - \varepsilon \\ &\geqq n\sin(\theta(A)-\theta_0) - 3\varepsilon \end{aligned}$$

そこで $m>N$ なる故 $m\to\infty$ でも成立する。

$dir(A'Y) \geqq n\sin(\theta(A)-\theta_0)-3\varepsilon$　此処で ε は任意である。
そこで　$dir(A'Y) \geqq n\sin(\theta(A)-\theta_0) > 0$　即 $A' \neq Y$ である。即ちAには二つの異った点 A′Y が対応する。即Aは正則点でない即ちむじゅんである。　　　　（証明完了）

さて此処で $P(n) \ni P \to \Sigma \in \Delta(n)$ の対応で或る定まった点を夫々O点としてその点より同一方向にO点よりの長さによる座標を $P(n)$, $\Delta(n)$ の点に与へる。一般に前者をtで後者をSで表すことにする。そのとき S点に対応する $P(n)$ の点の座標tはSの関数と考へられる。其を $t(S)$ で表す。

すると次が成立する。

$t(S)$ はSについての有界単調増加函数である。此は $P(\rho) \ni P_1, P_2 \to q_1, q_2$ に $\Delta(\rho)$ が夫々対応するとき、$\overline{P_1q_1}$ と $\overline{P_2q_2}$ が交らぬということである。此は当然である。もし交ったとすれば $dis(P_1q_1)=dis(P_2q_2)=\rho$ そして $dis(P_1q_2) \geqq \rho$, $dis(P_2q_1) \geqq \rho$ でなければならぬ。然しもし前者が成立するとせば $\Delta P_1q_1q_2$ に於いて $dis(P_1q_2) \geqq dis(P_1q_1)$ そこで $\angle P_1q_1q_2 \geqq \angle P_1q_2q_1$ でなければならぬ。すると $\angle P_2q_1q_2 > \angle P_2q_2q_1$ 即ち $dis(q_1P_2) < dis(P_2q_2)=\rho$ 此は後者にむじゅんする。

扱此の逆即ち $t(S) \geqq 0$ なる有界単調増加函数が与へられたとき上の様な意味で $t(S)$ を持つ様な曲線Pが必ず存在することを示したいが猶少し長くなるので此の次にまわしたい。そして次のことを注意したい。

此処で $t(S)=t$ は殆どすべてのSにつき微分可能である。そして今Pの S点の x, y 座標を $x(S)$, $y(S)$ で表し $P(\rho)$ のそれを $X(t)$, $Y(t)$ で表せば、

$$X(t)=x(S)-\rho\frac{\frac{dy}{dS}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dS}\right)^2+\left(\frac{dy}{dS}\right)^2}}$$

$$Y(t)=y(S)-$$

よって此は $\frac{dy}{dS}=[X(t), Y(t), x(S), y(S)]$

$\frac{dx}{dt}$ $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dX}{dt}$ についても同様 そこで $\frac{dt}{dS}$ が存在する点で $\frac{d^2y}{dS^2}$, $\frac{d^2x}{dS^2}$ が存在する。然して此が又 $Y(t)$, $P(t)$, $x(S)$, $y(S)$ で表はされる。そこで同一論法を施せば $\frac{dt}{dS}$ が存在する処では $x(S)$, $y(S)$, $X(t)$ $Y(t)$ が何階迄も微係数を持つことが云ひ得る。当然殆どすべてのS点で $P(\rho)$ は曲率円をもつ。　（つづく）

（1947. 5. 20）